

INFORME FINAL

1. IDENTIFICACIÓN DEL PROYECTO:

- a. Código del proyecto de investigación:
- b. Título del proyecto de Investigación: Aplicación de la lógica modal al concepto de plan estratégico.
- c. Investigador principal y Co-Investigador: Dr. Miguel Ángel León Untiveros
- d. Línea de Investigación: Gestión Pública (Fundamentos científicos en la negociación y la toma de decisiones en las empresas).

2. INTRODUCCIÓN:

El presente trabajo es una aplicación de resultados formales y teóricos elaborados por otros autores, así como el autor del mismo. Por ende, no tiene sino el carácter de una investigación aplicada. En ese sentido, la originalidad del mismo, no radica en la parte teórica (desarrollada en los puntos I y II, sino en la aplicación en sí de tal marco teórico, que hasta donde conocemos es escaso, sino inexistente.

3. MARCO TEÓRICO:

I. Sobre la racionalidad limitada¹.

Cabe notar que la aplicación de la lógica modal está relacionada con la idea de racionalidad. Lo cual obliga, para esta investigación, revisar el concepto de racionalidad limitada. Veamos.

El siglo pasado ha sido extraordinario científicamente, pues el conocimiento de la naturaleza ha tenido un gran impacto de la sociedad.

¹ Esta parte es únicamente introductoria, y no pretende dar cuenta del concepto de racionalidad limitada, el cual está siendo trabajado en otro denominado "Las paradojas de la razón", que estamos desarrollando dentro del Grupo de Investigación Episteme. El suscrito es el autor del proyecto y el resultado aún no ha sido publicado, y posiblemente tenga más modificaciones. Para fines de este trabajo, hemos tomado parcialmente dicho trabajo inédito. Un avance previo está disponible en nuestra página en www.academia.edu, el título de "La Paradoja de la Disponibilidad", pero al no tratarse de un trabajo terminado ni publicado, no es apto para citarse.

No obstante estos adelantos ha minado el llamado dogma de la unidad de la razón. Tanto en las matemáticas como en la ciencia, la idea de unidad ha desaparecido. En matemáticas es bastante conocido las dos escuelas de investigación: la formalista y la intuicionista, ambas surgidas a inicios del siglo XX. En la física la escisión entre la física relativa y la mecánica cuántica ha dado lugar a que se renuncie por lo menos al monismo ontológico, y sólo se persiga un monismo o unidad metodológica. Todo esto ha dado lugar a la noción de razón limitada (“bounded rationality”, “limited reason”, aparecido en el contexto de la economía y “limited knowledge”, “unkowable”, aparecido en el contexto de las matemáticas).

Otro aspecto de la razón limitada está dado por la finita capacidad humana. En el siglo XX y en lo que va de este, el asunto de la limitación ha sido también presentado por los aspectos de la tecnología, por ejemplo, aun cuando en teoría la capacidad del computador es ilimitada, no obstante no es posible construir un computador como idealmente se le considera, y asimismo, recientemente, en el 2005, la astrofísica informó que las partes del universo más allá de una distancia de 62 mil millones de años luz están tan distantes como para que nos llegue alguna información de esos lugares (Gott III, et al., 2005).

Esta situación está se suma a la aceptación de que los conocimiento científicos son falibles, es decir, que aun cuando tales conocimientos se funden en un sólido aparato formal y estén suficientemente corroborados empíricamente, cabe siempre que el día de mañana descubramos que tales creencias eran incorrectas. Por ende la idea de una verdad final o un absoluto, tan presente en la ciencia y filosofía de la ciencia y las matemáticas del siglo XIX, ya no es posible de ser aceptada. Así que, nuestros resultados, por más cuidado que pongamos en su elaboración, sólo tienen un alcance parcial y un vigor temporal (*pro tem*).

Esta situación hace surgir la pregunta, ¿cómo hemos de entender nuestras creencias científicas en relación al mundo? ¿la ciencia logra describir la

realidad cómo es? Sobre la última cuestión, la respuesta es negativa. Considerando lo antes señalado, y que requeriría de una mayor explicación, que escapa a este trabajo, no podemos seguir sosteniendo que la ciencia describe fielmente la realidad *an sich*. Y si consideramos que lo hace aproximadamente, esto debe entenderse en el sentido de que tal aproximación sólo es una forma de decir las cosas, pues no es medible (no se puede medir probabilísticamente) y además nunca puede ser fiel o exacta, pues tal conocimiento dejaría de ser falible y sería dogmático.

Sobre la primera pregunta, una respuesta que consideramos adecuada es la ofrecida por las nociones de modalidad y probabilidad. En el caso de la modalidad, se trata de expresar las propiedades semánticas de las expresiones que usamos para formular proposiciones, en otras palabras son los modos de expresar la teoría. Mientras que en el caso de las probabilidades, se trata de un “salto” teórico de nuestro conocimiento finito de los experimentos, estadísticamente entendidos, a la teoría donde los conceptos exigen considerar el infinito tanto potencial como en acto (aun cuando sepamos que ello no es empíricamente realizable), de modo tal que nos permita encontrar regularidades con las cuales trabajar y poder dominar algunos aspectos de la realidad.

Como quiera que el concepto de modalidad lo trataremos más adelante, trataremos muy brevemente el concepto estándar de probabilidad, a fin de tener un entendimiento claro del mismo.

I.2. El concepto de probabilidad².

Sea (\mathfrak{S}, S, P) , donde \mathfrak{S} el dominio de proposiciones³, S la clase de estados-de-cosas posibles y P la función de probabilidad, $P: S \rightarrow \mathbb{R}$, a cual cumple con los siguientes axiomas:

² Seguimos la axiomatización propuesta en (Howson & Urbach, 2006).

³ Empleamos el término proposición como sinónimo de enunciado.

Axioma I. $P(a) \geq 0$, para todo a en el dominio de P .

Axioma II. $P(\top) = 1$ [\top es una tautología].

Axioma III. $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$ si a y b son mutuamente inconsistentes, esto es, si $a \wedge b \Leftrightarrow \perp$.

$$\mathcal{A} \perp \mathcal{B} := (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vdash (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{C})$$

Teorema 1. $P(\neg a) = 1 - P(a)$

1. $P(a \vee \neg a) = 1$ Axioma II, $a \vee \neg a$ es \top .
2. $P(a \vee \neg a) = P(a) + P(\neg a)$ Axioma III, pues $a \wedge \neg a \Leftrightarrow \perp$
3. $1 = P(a) + P(\neg a)$ 1, 2
4. $P(\neg a) = 1 - P(a)$ 3

Teorema 2. $a \Leftrightarrow b, P(a) = P(b)$

1. $P(a \vee \neg b) = 1$ Axioma II, ya que si $a \Leftrightarrow b$, entonces $a \vee \neg b$ es \top .
2. $P(a \vee \neg b) = P(a) + P(\neg b)$ Axioma III, pues si $a \Leftrightarrow b$, entonces $a \perp \neg b$.
3. $1 = P(a) + P(\neg b)$ 1, 2
4. $P(\neg b) = 1 - P(b)$ Teorema 1
5. $1 = P(a) + 1 - P(b)$ 3, 4
6. $0 = P(a) - P(b)$ 5.
7. $P(a) = P(b)$

Teorema 3. *Teorema de monotonía*⁴, que señala lo siguiente: Sea dos proposiciones a, b , si ocurre que $a \Rightarrow b$, entonces $P(a) \leq P(b)$. La demostración de este teorema es:

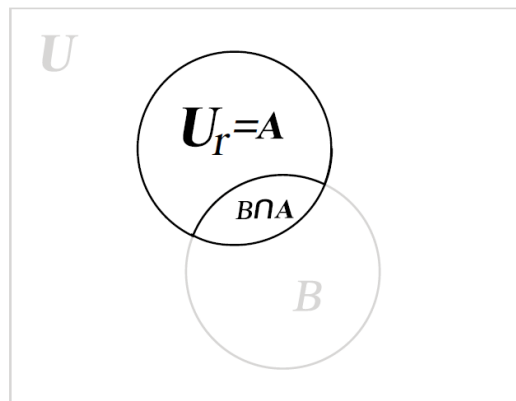
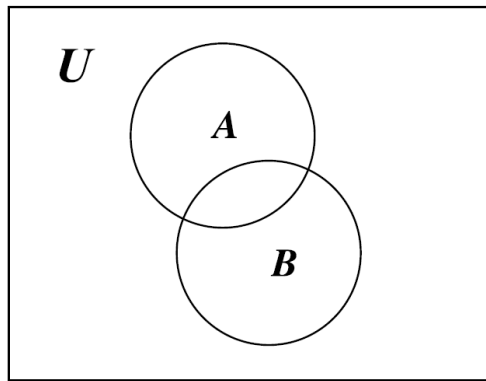
1. $a \Rightarrow b$ Premisa (supuesto)
2. $b \Leftrightarrow a \vee (b \wedge \neg a)$ 1
3. $P(b) = P(a \vee (b \wedge \neg a))$ 2, Teorema 2
4. $a \Rightarrow \neg(b \wedge \neg a)$ LPO
5. $a \wedge (b \wedge \neg a) \Leftrightarrow \perp$ 4, LPO
6. $P(b) = P(a) + P(a \wedge \neg b)$ 3, 4, 5, Axioma III

⁴ Siguiendo a (Suppes & Zanotti, 1991; Kronz, 2007).

- | | |
|--------------------------------|----------|
| 7. $P(a \wedge \neg b) \geq 0$ | Axioma I |
| 8. $P(b) \geq P(a)$ | 6, 7 |
| 9. $P(a) \leq P(b)$ | 8 |

Probabilidad condicional:

$$P(a|b) := \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$



Definición:

$$P(a \wedge b) := P(a)P(b), \text{ cuando } a \perp b$$

Teorema 4. $P(a|b) = P(a)$, cuando $a \perp b$

$$1. P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \quad \text{def. } P(a|b)$$

2. $P(a \wedge b) := P(a)P(b)$ cuando $a \perp b$
3. $P(a|b) = \frac{P(a)P(b)}{P(b)}$ 1, 2
4. $P(a|b) = P(a)$ 3.

Teorema 5. Teorema de Bayes:

$$P(h|e) = P(h) \frac{P(e|h)}{P(e)}$$

Donde:

$P(h|e)$ es la probabilidad *a posteriori*.

$P(h)$ es la probabilidad *a priori*.

Prueba:

1. $P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$
2. $P(b|a) = \frac{P(b \wedge a)}{P(a)}$
3. $\frac{P(a|b)}{P(b|a)} = \frac{\frac{P(a \wedge b)}{P(b)}}{\frac{P(b \wedge a)}{P(a)}}$ 1, 2, división.
4. $\frac{P(a|b)}{P(b|a)} = \frac{P(a)}{P(b)}$ 3, $P(a \wedge b) = P(b \wedge a)$
5. $P(a|b) = P(a) \frac{P(b|a)}{P(b)}$ 4

Nota: en las probabilidades bayesianas no hay tal cosa como la probabilidad *a priori*. De modo que lo que tenemos es, una información \mathcal{J} previa, siempre. Así que el teorema de Bayes se expresa así:

$$P(h|e, \mathcal{J}) = P(h, I) \frac{P(e|h, \mathcal{J})}{P(e, \mathcal{J})}$$

cf. (von der Linden, Dose, & von Toussaint, 2014, p. 12).

II. La lógica modal.

Dentro de la gran familia de las lógicas no clásicas está el subconjunto denominado lógica modal, que no es una sola lógica sino que es un grupo de sistemas lógicos, y que algunos de ellos se remite a los principios de la lógica clásica, esto es: identidad, no contradicción y tercio excluido. Para fines de este trabajo, es necesario presentar una breve reseña de la historia de la lógica modal, así como presentar el llamado modelo estándar de la lógica modal.

II.1. Brevísima historia de la lógica modal.

Con respecto a la historia de la lógica modal, debemos señalar que el concepto de modalidad ha sido estudiado desde los tiempos de Aristóteles, igualmente con aportes de los Estoicos. En la edad media, tenemos a Avicena y Ockham, y en la edad moderna, al gran matemático y filósofo alemán G. Leibniz. A fines del siglo XIX, el gran matemático y filósofo norteamericano C.S. Peirce también trabajó el concepto de modalidad. Igualmente, cabe destacar los trabajos de Hugh MacColl (1831-1909), C.I. Lewis (1883 -1964), Henry Bradford Smith (1890-1938), Oskar Becker (1889-1964) y del gran Kurt Gödel (1906-1978), quienes trabajaron en forma matemática el concepto de modalidad.

Por otro lado, cabe mencionar que estos trabajos no fueron aceptados pacíficamente pues tuvo el rechazo de grandes matemáticos y filósofos como Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), entre otros. De modo que la aplicación de la lógica modal a la ciencia recién ha tenido lugar en la década de los 1980 en adelante, en especial en las matemáticas y en la inteligencia artificial⁵.

⁵ Para una revisión más detallada de la historia de la lógica modal puede verse (Goldblatt, 2006).

II.2. El modelo estándar de la lógica modal.

Como ya hemos señalado, no existe un único sistema de lógica modal, sino que hay varios. Para fines del presente trabajo, emplearemos el denominado sistema estándar de la lógica modal. A fin de esclarecer este tema hemos de señalar que este sistema modal estándar se basa en la lógica de primer-orden clásica, que es la que se estudia en los cursos de pregrado de matemáticas y las ingenierías. Para fines de una adecuada presentación de la lógica de primer orden, señalamos lo siguiente:

Sea L un lenguaje de primer, donde su sintaxis cumple con:

- i. Un conjunto de símbolos de constantes $\{c_i \mid i \in I\}$,
- ii. Para cada entero positivo n , un conjunto de símbolos de funciones n -arias $\{f_j \mid j \in J_n\}$, y
- iii. Para cada $n \geq 1$, un conjunto de símbolos de relaciones n -arias $\{p_k \mid k \in K_n\}$.

Asimismo, L tiene:

- iv. Una secuencia de variables x_0, x_1, x_2, \dots ,
- v. Conectivos \neg (negación) y \vee (disyunción),
- vi. \exists (cuantificador existencial), y
- vii. La relación binaria de igualdad, $=$.

Asimismo, L tiene los esquemas axiomáticos de Łukasiewicz (en honor al lógico polaco Jan Łukasiewicz, que los formuló en 1929):

$$\text{Ax1. } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})).$$

$$\text{Ax2. } (\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}.$$

$$\text{Ax3. } \mathcal{A} \Rightarrow (\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}).$$

Las reglas de inferencia, que son necesarias para todo sistema lógico, y que desde G. Frege, ya es un lugar común, son las siguientes:

- R1. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos fórmulas bien formadas, que se abreviada *fbf*, tenemos que de $\mathcal{A}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$, que se conoce como la regla de separación o *modus ponens*, conocida desde la Grecia clásica.
- R2. Dado un teorema \mathcal{A} , se deduce inmediatamente otro teorema \mathcal{B} sustituyendo en \mathcal{A} una de cualquiera de sus variables, en todas sus apariciones, por una misma *fbf* cualquiera. Esta regla es la regla de sustitución uniforme de variables.

Ahora, procedemos a presentar una versión simple del sistema mínimo de lógica modal, llamado sistema K (en honor al lógico norteamericano Saul Kripke), y lo haremos para la lógica proposicional, que es menos expresiva que la lógica de primer orden, antes descrita. Para ello en primer lugar, presentaremos brevemente la lógica proposicional clásica⁶:

A. Términos primitivos.

Símbolos lógicos:

Constantes lógicas: \neg, \Rightarrow

Signos de puntuación: $()$

Símbolos no lógicos:

Variables proposicionales: $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$

B. Reglas de formación.

RF1. Toda variable proposicional es una *fbf*.

RF2. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos *fbfs*, entonces $\neg\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ son también *fbfs*.

RF3. Sólo son *fbfs* las cadenas de símbolos que resultan de la aplicación de RF1 y RF2.

⁶ Tomamos la presentación hecho por (Cassini, 2012), empero puede verse la efectuada por (Jeffrey, 2006; Mendelson, 2015), etc., pues se tratan de lugares comunes en la lógica actual.

C. Términos definidos.

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} := \neg(\mathcal{A} \Rightarrow \neg \mathcal{B}).$$

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} := \neg((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$$

D. Las reglas de inferencia son R1 y R2, antes indicadas.

E. Los axiomas son que se forman a partir de los esquemas axiomáticos de Łukasiewicz, antes indicados.

El sistema lógico que cumple con A – E es llamado el cálculo o lógica proposicional, CP, este sistema incluye todas las tautologías que se derivan de sus axiomas.

Hecho esto, presentamos los axiomas del sistema K :

K1. Las tautologías del CP.

K2. $\diamond := \neg \Box \neg \mathcal{A}$.

Siendo sus reglas de inferencia:

RK1. *Modus ponens*.

RK2. Regla de necesidad: Si $\vdash \mathcal{A}$, entonces $\vdash \Box \mathcal{A}$.

Esta presentación del sistema K , permite ver claramente que este sistema de lógica modal no es un sustituto de la lógica clásica (en especial del CP), sino que es una extensión pues sobre la base del CP, añadiendo K2 y RK2 obtenemos el sistema modal K .

Existen otros sistemas más, que son usualmente estudiados en los diversos textos introductorios de lógica modal, sólo por mor de la claridad enunciaremos algunos de los más conocidos:

El sistema T.

Partiendo del sistema K , se añade el siguiente esquema axiomático:

$$\Box \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

El sistema S4.

Partiendo del sistema T , se añade el axioma 4: $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$. Y finalmente,

El sistema S5.

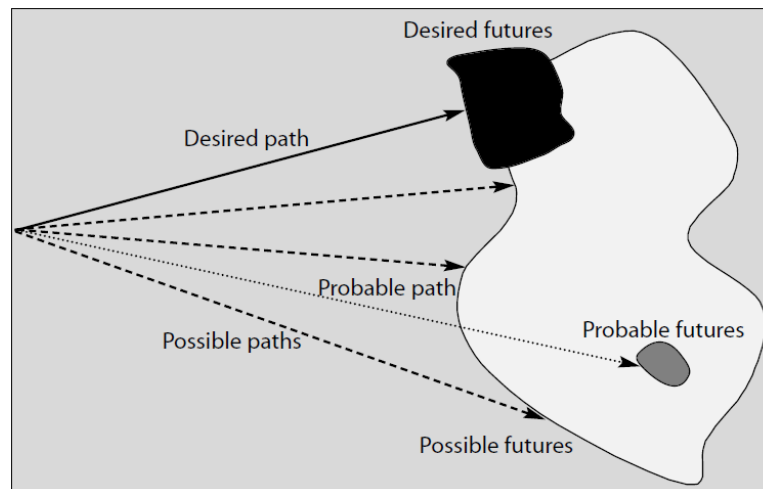
Partiendo del sistema $S4$, se añade el siguiente axioma: $\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$.

Para los fines de este trabajo, no es necesario ver los aspectos semánticos de la lógica modal, que han tenido un gran avance luego de la mitad del siglo pasado. Para el lector interesado lo remitimos al trabajo de (Chellas, 1980).

4. ANÁLISIS:

III. Aplicación de la lógica modal concepto de plan estratégico.

Es el proceso del planeamiento estratégico, se efectúa la elaboración de diversos escenarios posibles, con la alteración de una o más variables relevantes. Mats Lindgren y Hans Bandhold, (2003), se estudia el concepto de escenario, sobre cuya definición no hay unidad, para el esclarecimiento necesario se propone distinguir entre futuros deseados, probables y posibles. Donde un futuro deseado es parte de la visión, el futuro probable es la predicción que futuro que se hace a partir de los indicadores y evidencia disponibles. Y, el futuro posible es más amplio y que incluye a los probables como los deseados. El siguiente gráfico ilustra esto.



Relaciones entre los futuros posibles, probables y deseados

Es así que el concepto de escenario, es diferente a visión y predicción (forecast) (Lindgren & Bandhold, 2003, p. 24), pero es un subconjunto de los futuros posibles. ¿Cómo entender conceptualmente, con la ayuda de las herramientas formales antes explicadas, el concepto de escenario?

¿Es el escenario una descripción del futuro? En razón de que el escenario no se corresponde con un mundo cierto y determinista, no se trata de una descripción exacta, sino aproximada. Para tal propósito se emplean las probabilidades que como señalamos en la primera parte de este trabajo son producto y expresión de nuestros límites propios para conocer el mundo.

Asimismo, el escenario, tiene elementos descriptivos pero también intencionales, y en ese sentido ya no es una mera proyección probabilística del futuro sino que además “refiere” a un futuro deseable o está encaminado a uno deseable. Y tal aspecto ya escapa del lenguaje meramente probabilístico y lo incluye en uno modal, en especial un tipo de modalidad deóntica, que es (siguiendo la lógica modal clásica) una lógica que estudia el concepto de mundo debido o mundo idealizado, y que brevemente formulamos así:

Se trabaja con la lógica deóntica, sistema D (Hanson, 1965)⁷, cuyos esquemas axiomáticos y reglas de inferencia son:

Sus operadores son: obligado, \bigcirc , permitido, P , prohibido, Ph , y facultativo F , y que se definen así:

$$\bigcirc\mathcal{A} := \neg P\mathcal{A}$$

$$Ph\mathcal{A} := \neg P\mathcal{A}$$

$$F\mathcal{A} := P\mathcal{A} \wedge P\neg\mathcal{A}$$

Los esquemas axiomáticos y sus reglas de inferencia son:

$$A1. A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$A2. (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$A3. (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$A4. \bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B) \quad [\text{Remedo modal}]$$

$$A5. \bigcirc A \Rightarrow PA \quad [\text{Ley de Bentham}]$$

$$R1. \text{ Si } \vdash A \text{ y } \vdash A \Rightarrow B, \text{ entonces } B. \quad [Modus Ponens]$$

$$R2. \text{ Si } \vdash A \text{ entonces } \bigcirc B. \quad [\bigcirc\text{-necesitación}]$$

De este modo, el concepto de escenario no es descriptivo en relación a un mundo futuro verificable, sino que es referido a un mundo deseable, y que es un mundo posible, que se entiende mejor con como un sistema deóntico. Ahora cabe señalar que a mediados del siglo pasado, el lógico Alan Ross Anderson demostró la reducción del sistema D de lógica deóntica a la lógica modal (Anderson, 1958), con lo cual nos mantenemos en el mundo de lo posible. Por tanto, el concepto de escenario tiene sentido dentro de la noción de mundos posibles formalizado por la lógica modal.

⁷ Únicamente hemos cambiado la simbología a fin de mantener la coherencia del texto.

5. CONCLUSIONES, RESULTADOS, HALLAZGOS Y RECOMENDACIONES.

IV. Conclusiones y resultados.

El plan estratégico pretende demarcar el derrotero de la empresa entre los diversos escenarios. Empero como hemos visto, gracias a las herramientas formales empleadas, el concepto de escenario no es descriptivo de un mundo futuro, sino que es desiderativo, esto es que expresa las creencias y deseos de los agentes. Por ello es que no se trata de un futuro sólo probable, sino que además se trata de un futuro deseado, lo cual no convierte en un mundo imperativo, y que se comprende bien mediante la lógica deóntica (que es una derivación de la lógica modal, aquí trabajada).

En este trabajo no aplica los puntos de hallazgos y recomendaciones.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Anderson, A. R. (1958, January). A Reduction of Deontic Logic to Alethic Modal Logic. *Mind*, 67(265), 100-103.
- Bernardo, J. M., & Smith, A. F. (2000). *Bayesian Theory. Third edition* (Third ed.). Chichester et al.: Wiley.
- Carnap, R. (1962). *Logical foundations of probability* (Second ed.). Chicago: The University of Chicago Press.
- Cassini, A. (2012). *El juego de los principios. Una introducción al método axiomático* (segunda ed.). Buenos Aires: AZ.
- Chellas, B. F. (1980). *Modal Logic: An introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cresswell, M., Mares, E., & Rini, A. (Eds.). (2016). *Logical Modalities from Aristotle to Carnap. The Story of Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- David, F. R., & David, F. R. (2017). *Strategic Management: A Competitive Advantage Approach, Concepts and Cases* (Sixteenth ed.). Essex: Pearson.
- Fischer, B. (2017). *Modal Justification via Theories*. Cham: Springer.
- Fischer, B., & Leon, F. (Eds.). (2017). *Modal Epistemology After Rationalism*. Cham: Springer.
- Garson, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers. Second edition* (Second ed.). New York: Cambridge University Press.
- Goldblatt, R. (2006). Mathematical Modal Logic: A View of its Evolution. In D. M. Gabbay, & J. Woods (Eds.), *Handbook of the History of Logic* (Vol. 7. Logic and the modalities in the twentieth century, pp. 1-98). Amsterdam et al.: Elsevier - North Holland.
- Gott III, J. R., Jurić, M., Schlegel, D., Hoyle, F., Vogeley, M., Tegmark, M., . . . Brinkmann, J. (2005, May 10). A map of the Universe. *JOA*. J. Richard Gott III, Mario Jurić, David Schlegel, Fiona Hoyle, Michael Vogeley, Max Tegmark, Neta Bahcall, Jon Brinkmann. *The Astrophysical Journal*, 634, 463-483.
- Hanson, W. H. (1965). Semantics for deontic logic. *Logique et Analyse*, 8(31), 177-190.
- Howson, C., & Urbach, P. (2006). *Scientific Reasoning. The Bayesian Approach* (Third ed.). Chicago & La Salle: Open Court.
- Jansana, R. (1990). *Una introducción a la lógica modal*. Madrid: Tecnos.
- Jeffrey, R. (2006). *Formal Logic. Its Scope and Limits* (Fourth ed.). (J. P. Burgess, Ed.) Indianapolis - Cambridge: Hackett Publishing Company.

- Kronz, F. (2007, August). Non-Monotonic Probability Theory and Photon Polarization. *Journal of Philosophical Logic*, 36(4), 449-472.
- Lindgren, M., & Bandhold, H. (2003). *Scenario Planning. The Link Between Future and Strategy*. New York: Palgrave Macmillan.
- Makinson, D. C. (1973). *Topics in Modern Logic*. London: Methuen & Co Ltd.
- Melia, J. (2003). *Modality*. Chesham: Acumen.
- Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic* (Sixth ed.). Boca Raton et al.: CRC Press.
- Popkorn, S. (1994). *First steps in modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic. From if to is* (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Rosser, J. B. (1953). *Logic for Mathematicians*. New York et al.: McGraw-Hill.
- Suppes, P., & Zanotti, M. (1991). Existence of hidden variables having only probabilities. *Foundations of Physics*, 21(12), 1479-1499.
- Trelles Montero, J. Ó. (2001). *Apuntes de Lógica Modal*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- van Benthem, J. (2010). *Modal Logic for open minds*. Amsterdam: Center for the Study of Language and Information.
- von der Linden, W., Dose, V., & von Toussaint, U. (2014). *Bayesian Probability Theory. Applications in the Physical Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weyl, H. (1940). The ghost of modality. En M. Farber (Ed.), *Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl* (págs. 278-303). Cambridge: Harvard University Press.