

SAPIENTIS

Revista de Divulgación Científica de la Universidad Peruana del Centro

Volumen 1 Número 3 Julio del 2018



UNIVERSIDAD PERUANA
DEL CENTRO
"Ex Umbra In Solem"



Enfermería

Derecho y Ciencia Política

Obstetricia

Administración de Empresas

Ingeniería Civil

REPORTE DE INVESTIGACIONES DE LA UNIVERSIDAD APLICACIÓN DE LA LÓGICA MODAL AL CONCEPTO DE PLAN ESTRATÉGICO.

Dr. Miguel Ángel León Untiveros

científicos son falibles, es decir, que surgen cuando tales conocimientos se funden en un sólido apoyo formal y están suficientemente corroborados empíricamente, cabe siempre que el día de mañana descubramos que tales creencias eran incorrectas. Por ende, la idea de una verdad final o un absoluto, tan presente en la ciencia y filosofía de la ciencia y las matemáticas del siglo XIX, ya no es posible de ser aceptada. Así que, nuestros resultados, por más cuidado que pongamos en su elaboración, sólo tienen un alcance parcial y un vigor temporal (pro tem).

Esta situación hace sugerir la pregunta, ¿cómo hemos de entender nuestras creencias científicas en relación al mundo? ¿La ciencia logra describir la realidad cómo es? Sobre la última cuestión, la respuesta es negativa. Considerando lo antes señalado, y que requerirla de una mayor explicación, que escapa a este trabajo, no podemos seguir sosteniendo que la ciencia describe fielmente la realidad *in sich*. Y si consideramos que lo hace aproximadamente, esto debe entenderse en el sentido de que tal aproximación sólo es una forma de decir las cosas, pues no es medible (no se puede medir probabilísticamente) y además nunca puede ser fiel o exacta, puesto que el conocimiento dejaría de ser falible y sería dogmático.

Sobre la primera pregunta, una respuesta que consideramos adecuada es la ofrecida por las nociones de modalidad y probabilidad. En el caso de la modalidad, se trata de expresar las propiedades semánticas de las expresiones que usamos para formular proposiciones, es otras palabras, son los modos de expresar la teoría. Mientras que, en el caso de las probabilidades, se trata de un "salto" teórico de nuestro conocimiento finito de los experimentos, estadísticamente entendidos, a la teoría donde los conceptos exigen considerar el infinito trato potencial como *en acto* (un cuando sepamos que ello no es empíricamente realizable), de modo tal que nos permita encontrar regularidades con las cuales trabajar y poder dominar algunos aspectos de la realidad.

Como quiera que el concepto de modalidad lo trataremos más adelante, trataremos muy brevemente el concepto estándar de probabilidad, a fin de tener un entendimiento claro del mismo.

2.2 El concepto de probabilidad¹.

Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{S}, P)$, donde \mathcal{S} el dominio de proposiciones², \mathcal{S} la clase de estados-decósas posibles y P la función de probabilidad, $P: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, a cual cumple con los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned} P(s) &\geq 0, \text{ para todo } s \in \text{el dominio de } P. \\ P(T) &= 1 [T \text{ es una tautología}]. \end{aligned}$$

$P(a \vee b) = P(a) + P(b)$ si a y b son mutuamente inconsistentes, esto es, si $a \wedge b \Rightarrow \perp$.

¹ Siguiendo la axiomatización propuesta en (Howson & Urbach, 2006).
² Emplearemos el término proposición como sinónimo de enunciado.

$\forall L: \mathcal{B} = (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \vdash (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{C})$

Teorema 1. $P(\neg a) = 1 - P(a)$

1. $P(a \vee \neg a) = 1$ Axioma II, $a \vee \neg a$ es T.

2. $P(a \vee \neg a) = P(a) + P(\neg a)$ Axioma III, pues $a \vee \neg a = 1$.

3. $1 = P(a) + P(\neg a)$ 1, 2.

4. $P(\neg a) = 1 - P(a)$ 3

Teorema 2. $a \Rightarrow b, P(a) \rightarrow P(b)$

1. $P(a \wedge b) = 1$ Axioma II, ya que si $a \Rightarrow b$, entonces $a \wedge b$ es T.

2. $P(a \wedge b) = P(a) + P(\neg b)$ Axioma III, pues si $a \Rightarrow b$, entonces $a \wedge \neg b$.

3. $1 = P(a) + P(\neg b)$ 1, 2.

4. $P(\neg b) = 1 - P(b)$ Teorema 1

5. $1 - P(a) + 1 - P(b)$ 3, 4

6. $0 = P(a) - P(b)$ 5.

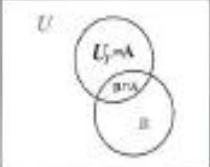
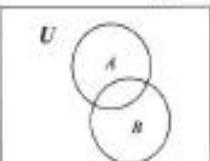
7. $P(a) = P(b)$

Teorema 3. *Téorema de Bayes*¹, que señala lo siguiente: Sea dos proposiciones a, b , si ocurre que $a \Rightarrow b$, entonces $P(a) \leq P(b)$. La demostración de este teorema es:

1. $a \Rightarrow b$ Premisa (supuesto)
2. $b \Rightarrow a \wedge \neg a \Rightarrow a$ 1
3. $P(b) = P(a \wedge \neg a \Rightarrow a)$ 2, Teorema 2
4. $a \Rightarrow \neg a \Rightarrow a$ LPO
5. $a \wedge (\neg a \Rightarrow a) \Rightarrow a$ 4, LPO
6. $P(b) = P(a) + P(a \wedge \neg b)$ 3, 4, 5, Axioma III
7. $P(a \wedge \neg b) = 0$ Axioma I
8. $P(b) \geq P(a)$ 6, 7
9. $P(a) \leq P(b)$ 8

Probabilidad condicional:

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$



¹ Siguiendo a Suppes & Zermelo, 1991; Kreis, 2007.

Definición:

$P(a|b) := P(a)P(b)$, cuando $a \wedge b$

Teorema 4. $P(a|b) = P(a)$, cuando $a \wedge b$

$$1. \quad P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \text{ def. } P(a|b)$$

2. $P(a|b) = P(a)P(b)$ cuando $a \wedge b$

$$3. \quad P(a|b) = \frac{P(a)P(b)}{P(b)} \quad 1, 2$$

4. $P(b|a) = P(b)$ 3.

Teorema 5. Teorema de Bayes:

$$P(b|a) = P(b) \frac{P(a|b)}{P(a)}$$

Donde:

$P(b|a)$ es la probabilidad a posteriori.
 $P(b)$ es la probabilidad a priori.

Prueba:

$$1. \quad P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

$$2. \quad P(b|a) = \frac{P(b|a)}{P(a)} \quad 1, 2, \text{ división.}$$

$$3. \quad \frac{P(a|b)}{P(b|a)} = \frac{\frac{P(a \wedge b)}{P(b)}}{\frac{P(b|a)}{P(a)}} \quad 1, 2, \text{ división.}$$

$$4. \quad \frac{P(a|b)}{P(b|a)} = \frac{P(a)}{P(b)} \quad 3, P(a|b) = P(b|a)$$

$$5. \quad P(a|b) = P(a) \frac{P(b|a)}{P(b)} \quad 4$$

Nota: en las probabilidades bayesianas no hay tal cosa como la probabilidad a priori. De modo que lo que tenemos es, una información \mathcal{T} previa, siempre. Así que el teorema de Bayes se expresa así:

$$P(b|e, \mathcal{T}) = P(b, \mathcal{T}) \frac{P(e|b, \mathcal{T})}{P(e, \mathcal{T})}$$

² cf. (van der Linden, Dose, & von Toussaint, 2014, p. 12)

III. La lógica modal.

Dentro de la gran familia de las lógicas no clásicas está el subconjunto denominado lógica modal, que no es una sola lógica sino que es un grupo de sistemas lógicos, y que algunos de ellos se remite a los principios de la lógica clásica, esto es: identidad, no contradicción y tercio excluido. Para fines de este trabajo, es necesario presentar una breve reseña de la historia de la lógica modal, así como presentar el llamado modelo estándar de la lógica modal.

3.1 Brevisima historia de la lógica modal.

Con respecto a la historia de la lógica modal, debemos señalar que el concepto de modalidad ha sido estudiado desde los tiempos de Aristóteles, igualmente con aportes de los Estoicos. En la edad media, tenemos a Avicena y Ockham, y en la edad moderna, al gran matemático y filósofo alemán G. Leibniz. A fines del siglo XIX, el gran matemático y filósofo norteamericano C.S. Peirce también trabajó el concepto de modalidad. Igualmente, cabe destacar los trabajos de Hugh MacColl (1831-1909), C.I. Lewis (1883 - 1964), Henry Bradford Smith (1890-1938), Oskar Becker (1889-1964) y del gran Kurt Gödel (1906-1978), quienes trabajaron en forma matemática el concepto de modalidad.



Por otro lado, cabe mencionar que estos trabajos no fueron aceptados pacíficamente pues tuvo el rechazo de grandes matemáticos y filósofos como Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), entre otros. De modo que la aplicación de la lógica modal a la ciencia recién ha tenido lugar en la década de los 1980 en adelante, en especial en las matemáticas y en la inteligencia artificial³.

3.2 El modelo estándar de la lógica modal.

Como ya hemos señalado, no existe un único sistema de lógica modal, sino que hay varios. Para fines del presente trabajo, emplearemos el denominado sistema estándar de la lógica modal. A fin de esclarecer este tema haremos de señalar que este sistema modal estándar se basa en la lógica de primer orden clásica, que es la que se estudia en los cursos de pregrado de matemáticas y las ingenierías. Para fines de una adecuada presentación de la lógica de primer orden, señalamos lo siguiente:

Sea L un lenguaje de primer, donde su sintaxis cumple con:

- i. Un conjunto de símbolos de constantes $\{c_i | i \in I\}$,
- ii. Para cada entero positivo n , un conjunto de símbolos de funciones n -arias $\{f_j | j \in J\}, y$
- iii. Para cada $n \geq 1$, un conjunto de símbolos de relaciones n -arias $\{p_k | k \in K_n\}$.

Asimismo, L tiene:

- iv. Una secuencia de variables x_1, x_2, x_3, \dots ,
- v. Conectivos \neg (negación) y \vee (disyunción),
- vi. \exists (cuantificador existencial), y
- vii. La relación binaria de igualdad, $=$.

Asimismo, L tiene los esquemas axiomáticos de Lukasiewicz (en honor al lógico polaco Jan Lukasiewicz, que los formuló en 1929):

Ax1. $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$.

Ax2. $(\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$.

Ax3. $\mathcal{B} \Rightarrow (\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Las reglas de inferencia, que son necesarias para todo sistema lógico, y que desde G. Frege, ya es un lugar común, son las siguientes:

R1. Sean \mathcal{B} y \mathcal{C} dos fórmulas bien formadas, que se abrevian f/b , tenemos que de $\mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$, que se conoce como la regla de separación o *modus ponens*, conocida desde la Grecia clásica.

R2. Dado un teorema \mathcal{B} , se deduce inmediatamente otro teorema \mathcal{B}' sustituyendo en \mathcal{B} una de cualquiera de sus variables, en todas sus apariciones, por una misma f/b f' cualquier. Esta regla es la regla de sustitución uniforme de variables.

Ahora, procedemos a presentar una versión simple del sistema mínimo de lógica modal, llamado sistema K (en honor al lógico norteamericano Saul Kripke), y lo haremos para la lógica proposicional, que es menos expresiva que la lógica de primer orden, antes descrita. Para ello en primer lugar, presentaremos brevemente la lógica proposicional clásica⁴:

A. Términos primarios.

Símbolos lógicos:

Constantes lógicas: \neg, \Rightarrow

Símbolos de parentesis: $()$

Símbolos no lógicos:

Variables proposicionales: $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$

B. Reglas de formación.

RF1. Toda variable proposicional es una f/b .

³ Tomando la presentación hecha por (Castañi, 2012), acá se puede ver la efectuada por (Jeffrey, 2006; Mordeson, 2013), etc., que se habla de lugares comunes en la lógica actual.

- RF2. Si \mathbb{B} y \mathbb{B}' son dos $f/b/f$ s, entonces $\neg\mathbb{B}$ y $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}')$ son también $f/b/f$ s.
 RF3. Sólo son $f/b/f$ s las cadenas de símbolos que resultan de la aplicación de RFI y RF2.

C. Términos definidos.

$$\begin{aligned}\mathbb{B} \vee \mathbb{B}' &:= \neg \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}', \\ \mathbb{B} \wedge \mathbb{B}' &:= \neg (\mathbb{B} \Rightarrow \neg \mathbb{B}'), \\ \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}' &:= \neg (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}') \Rightarrow \neg (\mathbb{B}' \Rightarrow \mathbb{B})\end{aligned}$$

D. Las reglas de inferencia son R1 y R2, antes indicadas.

E. Los axiomas son que se forman a partir de los esquemas axiomáticos de Lukasiewicz, antes indicados.

El sistema lógico que cumple con A - E es llamado el cálculo o lógica proposicional, CP, este sistema incluye todas las tautologías que se derivan de sus axiomas.

Hecho esto, presentamos los axiomas del sistema K:

- K1. Las tautologías del CP.
 K2. $\Box \mathbb{B} \Rightarrow \neg \Box \neg \mathbb{B}$.

Siendo sus reglas de inferencia:

- RK1. Modus ponens.
 RK2. Regla de necesitación; Si $\vdash \mathbb{B}$, entonces $\vdash \Box \mathbb{B}$.

Esta presentación del sistema K, permite ver claramente que este sistema de lógica modal no es un sustituto de la lógica clásica (en especial del CP), sino que es una extensión pues sobre la base del CP, añadiendo K2 y RK2 obtenemos el sistema modal K.

Existen otros sistemas más, que son usualmente estudiados en los diversos textos introductorios de lógica modal, solo por mero de la claridad enunciaremos algunos de los más conocidos:

El sistema T.

Partiendo del sistema K, se añade el siguiente esquema axiomático: $\Box \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$.

El sistema S4.

Partiendo del sistema T, se añade el axioma $\Box \mathbb{B} \Rightarrow \Box \Box \mathbb{B}$. Y finalmente,

El sistema S5.

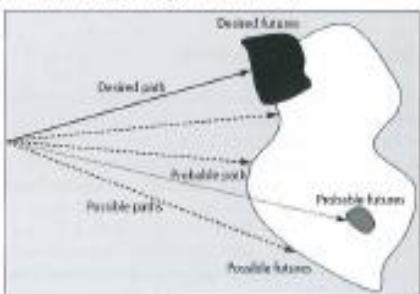
Partiendo del sistema S4, se añade el siguiente axioma: $\Diamond \Box \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$.

Para los fines de este trabajo, no es necesario ver los aspectos semánticos de la lógica modal, que han tenido un gran avance luego de la mitad del siglo pasado. Para el lector interesado lo remitimos al trabajo de (Chellas, 1980).

IV. Aplicación de la lógica modal concepto de plan estratégico.

Es el proceso del planeamiento estratégico, se efectúa la elaboración de diversos escenarios posibles, con la alteración de una o más variables

relevantes. Más Lindgren y Hans Bandhold, (2003), se estudió el concepto de escenario, sobre cuya definición no hay unidad, para el desarrollo necesario se propone distinguir entre futuros deseados, probables y posibles. Donde un futuro deseado es parte de la visión, el futuro probable es la predicción que futuro que se hace a partir de los indicadores y evidencia disponibles. Y, el futuro posible es más amplio y que incluye a los probables como los deseados. El siguiente gráfico ilustra esto.



Relaciones entre los futuros posibles, probables y deseados

Es así que el concepto de escenario, es diferente a visión y predicción (forecast) (Lindgren & Bandhold, 2003, p. 24), pero es un subconjunto de los futuros posibles. ¿Cómo entender conceptualmente, con la ayuda de las herramientas formales antes explicadas, el concepto de escenario?

¿Es el escenario una descripción del futuro? En razón de que el escenario no se corresponde con un mundo cierto y determinista, no se trata de una descripción exacta, sino aproximada. Para tal propósito se emplean las probabilidades que como señalamos en la primera parte de este trabajo son producto y expresión de nuestros límites propios para conocer el mundo.

Asimismo, el escenario, tiene elementos descriptivos, pero también intencionales, y en ese sentido ya no es una mera proyección probabilística del futuro, sino que además "refiere" a un futuro deseable o está encamulado a uno deseable. Y tal aspecto ya escapa del lenguaje meramente probabilístico y lo incluye en uno modal, en especial un tipo de modalidad deontica, que es (siguiendo la lógica modal clásica) una lógica que estudia el concepto de mundo debido o mundo idealizado, y que brevemente formulamos así:

Se trabaja con la lógica deontica, sistema D (Hansen, 1965)¹, cuyos esquemas axiomáticos y reglas de inferencia son:

Sus operadores son: obligado, \Box , permitido, P , prohibido, $\neg P$, y facultativo F , y que se definen así:

$$\begin{aligned}\Box \mathbb{B} &:= \neg P \mathbb{B}, \\ P \mathbb{B} &:= \neg \Box \neg \mathbb{B}, \\ F \mathbb{B} &:= P(\mathbb{B} \neg P \mathbb{B})\end{aligned}$$

¹ Otros autores cambian la nomenclatura al de mantener la coherencia del texto.

Los esquemas axiomáticos y sus reglas de inferencia son:

- A1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 A2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
 A3. $(\Box B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
 A4. $\Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ [Remedio modal]
 A5. $\Box A \Rightarrow \Box \Box A$ [Ley de Bestia]
 R1. Si $\vdash A \wedge \vdash A \Rightarrow B$, entonces B . [Modus Ponens]
 R2. Si $\vdash A$ entonces $\Box B$. [O - necesitación]

De este modo, el concepto de escenario no es descriptivo en relación a un mundo futuro verificable, sino que es referido a un mundo deseable, y que es un mundo posible, que se entiende mejor como un sistema deontico. Ahora cabe señalar que a mediados del siglo pasado, el lógico Alan Ross Anderson demostró la reducción del sistema D de lógica deontica a la lógica modal (Anderson, 1958), con lo cual nos mantenemos en el mundo de lo posible. Por tanto, el concepto de escenario tiene sentido dentro de la noción de mundos posibles formalizada por la lógica modal.

Conclusiones y Resultados

El plan estratégico pretende demarcar el dorotero de la empresa entre los diversos escenarios. Empero como hemos visto, gracias a las herramientas formales empleadas, el concepto de escenario no es descriptivo de un mundo futuro, sino que es desiderativo, esto es que expresa las creencias y deseos de los agentes. Por ello es que no se trata de un futuro sólo probabili, sino que además se trata de un futuro deseado, lo cual no convierte en un mundo impensivo, y que se comprende bien mediante la lógica deontica (que es una derivación de la lógica modal, aquí trabajada).

Referencias Bibliográficas:

- ANDERSON, A. R. (1958, January). A Reduction of Deontic Logic to Alethic Modal Logic. *Mind*, 67(265), 100-103.
 BERNARDO, J. M., & SMITH, A. F. (2000). *Bayesian Theory. Third edition* (Third ed.). Chichester et al.: Wiley.
 CARNAP, R. (1962). *Logical foundations of probability* (Second ed.). Chicago: The University of Chicago Press.
 CASSINI, A. (2012). *El juego de los principios. Una introducción al método axiomático* (segunda ed.). Buenos Aires: AZ.
 CHELLAS, B. F. (1980). *Modal Logic: An introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
 CRESSWELL, M., MARES, E., & RINI, A. (EDS.). (2016). *Logical Modalities from Aristotle to Carnap. The Story of Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press.
 DAVID, F. R., & DAVID, F. R. (2017). *Strategic Management: A Competitive Advantage Approach. Concepts and Cases* (Sixteenth ed.). Essex: Pearson.

FISCHER, B. (2017). *Model Justification via Theories*. Cham: Springer.

FISCHER, B., & LEON, F. (EDS.). (2017). *Modal Epistemology After Rationalism*. Cham: Springer.

GARSON, J. W. (2013). *Modal Logic for Philosophers. Second edition* (Second ed.). New York: Cambridge University Press.

GOLDBLAUT, R. (2006). *Mathematical Modal Logic: A View of its Evolution*. In D. M.

GABBAY, & J. WOODS (EDS.), *Handbook of the History of Logic* (Vol. 7. Logic and the modalities in the twentieth century, pp. 1-98). Amsterdam et al.: Elsevier - North Holland.

POPKORN, S. (1994). *First steps in modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

PRIEST, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is* (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

ROSSER, J. B. (1953). *Logic for Mathematicians*. New York: et al.: McGraw-Hill.

SUPPES, P., & ZANOTTI, M. (1991). Existence of hidden variables having only probabilities. *Foundations of Physics*, 21(12), 1479-1499.

TRELLES MONTERO, J. O. (2001). *Apuntes de Lógica Modal*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

VAN BENTHEM, J. (2010). *Modal Logic for open minds*. Amsterdam: Center for the Study of Language and Information.

VON DER LINDE, W., DOSE, V., & VON TOUSSAINT, U. (2014). *Bayesian Probability Theory. Applications in the Physical Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.

WEYL, H. (1940). The ghost of modality. En M. Farber (Ed.), *Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl* (ppgs. 278-303). Cambridge: Harvard University Press.